

MATRIZEN ALS DIAGRAMME

Lisa Hefendehl-Hebeker¹
Universität Duisburg-Essen

„All our thinking is performed upon signs of some kind or other, either imagined or actually perceived. The best thinking, especially on mathematical subjects, is done by experimenting in the imagination upon a diagram or other scheme, and it facilitates the thought to have it before one's eyes.“ (Peirce, zitiert nach Hoffmann 2006, S. 171.)

„Viele Beobachtungen bestätigen, dass für zahlreiche Schüler die Möglichkeit des Handhabens konkret hingeschriebener Objekte von außerordentlicher Wichtigkeit ist.“ (Törner 1982, S. 323)

Abstract: *Dieser Artikel betrachtet das Kurskonzept von Artmann und Törner zu Linearen Algebra und Geometrie aus der Perspektive der semiotischen Erkenntnistheorie von Peirce, wie sie von Hoffmann (2005) dargestellt wird. Dies wird exemplarisch am Beispiel des ersten Kapitels ausgeführt. Dabei zeigt sich, dass die gewählte Betrachtungsweise geeignet ist, den Kurs lerntheoretisch genauer zu charakterisieren und das didaktische Potential herauszuarbeiten.*

1. Ein Kurskonzept zur Linearen Algebra

Artmann und Törner publizierten 1980 einen Kursvorschlag zur Linearen Algebra in der gymnasialen Oberstufe, in dem das ausführliche Arbeiten in und mit dem Matrix-Vektor-Kalkül im Zentrum steht (Artmann & Törner 1982, 1984; s. auch Törner 1982).

Der Kurs orientiert sich fachlich an eigenen Erfahrungen sowie am Vorbild des Lehrbuches „Linear Algebra and its Applications“ von G. Strang (1976) und folgt methodisch insbesondere dem dort formulierten Motto „explain rather than deduce“, in dessen Sinne die Autoren bestrebt sind,

- Fragen zu stellen, ehe Antworten gegeben werden,
- zuerst Phänomene sichtbar zu machen und danach Erklärungen abzugeben,
- vom Konkreten zum Abstrakten voranzuschreiten und nicht umgekehrt.

Diese Ziele werden sowohl lokal bei der Einführung einzelner Begriffe über Beispiele und Aufgaben umgesetzt wie auch bei der globalen Stoffplanung in der Weise berücksichtigt, dass mit dem „Thema Lineare Gleichungssysteme und Matrizen“ ein beziehungsreiches Betätigungsfeld erschlossen und der Begriff des Vektorraumes erst am Schluss des Kurses zur weiteren theoretischen Durchdringung erarbeitet wird.

Dabei werden die folgenden inhaltlichen Akzente gesetzt:

¹ Prof. Dr. Lisa Hefendehl-Hebeker
University of Duisburg-Essen
Department of Mathematics
D-45117 Essen
lisa.hefendehl@uni-due.de

1. Der Einstieg erfolgt über lineare Gleichungssysteme und Matrizen mit Anwendungen vor allem in den Wirtschaftswissenschaften. Damit eignet sich das Aufgabenmaterial auch für die Vielzahl von Schülerinnen und Schülern, die wenig Verständnis für physikalische Anwendungen mitbringen. In diesem Kontext wird der Matrix-Vektor-Kalkül geometrie-unabhängig eingeführt und es wird ausführlich in und mit ihm gearbeitet. Dabei werden numerische und algorithmische Komponenten eingeflochten.
2. Mit den erarbeiteten Werkzeugen wird in einem zweiten Schwerpunkt ausführlich räumliche Geometrie betrieben. Vektoren, die als algebraische Objekte eingeführt wurden, können nun im geometrischen Gewand sowohl als Pfeile wie auch als Punkte erscheinen. Damit ergeben sich zwei gleichwertige Sprachebenen, die situationsangepasst gebraucht werden. In der thematischen Entwicklung werden klassische Unterrichtsinhalte der vektoriellen Koordinatengeometrie im \mathbb{R}^3 durch die Betrachtung linearer Abbildungen in geometrischer Verankerung ergänzt. Das Thema „Projektionsmatrizen“ schließlich ermöglicht eine geometrisch orientierte Lösungstheorie für lineare Gleichungssysteme mit drei Variablen und spannt auf diese Weise den Bogen zum Einstieg zurück. Damit ist für Grundkurse ein befriedigendes Abschlussniveau gesichert.
3. Das anschließende Kapitel über Grundzüge der Vektorraumtheorie dient der theoretischen Abrundung und Vertiefung für entsprechend leistungsfähige Lerngruppen. Bei der Einführung der abstrakten Begriffe kann auf die zuvor erworbenen reichen Erfahrungen mit Matrizen und Vektoren zurückgegriffen werden.

Für das ausführliche Arbeiten in und mit dem Matrix-Vektor-Kalkül in diesem Kurskonzept führen die Autoren sachliche und didaktische Gründe an.

1. Eine Sachanalyse der endlichdimensionalen Linearen Algebra zeigt, dass sich Matrizen hier als universales Werkzeug verwenden lassen. Fast alle wesentlichen Ergebnisse sind mit ihrer Hilfe zu gewinnen bzw. zu formulieren. Matrizen ermöglichen aufgrund ihrer Universalität umgekehrt die Verzahnung von Gebieten. Sie können insbesondere als verbindendes Element zwischen Arithmetik und Geometrie betrachtet werden und finden auch in der Stochastik maßgebliche Verwendung. Somit können Matrizen in der Oberstufenmathematik einen integrierenden Kern darstellen.
2. Aus didaktischer Sicht stellen Matrizen einen beziehungsreichen Unterrichtsgegenstand dar, der zugleich über eine gewisse Handfestigkeit verfügt. „Gerade im Grundkurs hat man hier die Möglichkeit, Schülern ein zwar nicht triviales, aber doch beherrschbares Routinematerial anzubieten, welches zudem noch in sich reichhaltig und interessant ist. Die Erfahrung zeigte, dass die Möglichkeit des Handhabens konkret hingeschriebener Objekte für viele Schüler von außerordentlicher Wichtigkeit ist.“ (Artmann & Törner 1984, S. 227)

Der Aspekt des „Handhabens konkret hingeschriebener Objekte“ verleiht der Thematik in besonderem Maße Züge des diagrammatischen Arbeitens im Sinne der semiotischen Erkenntnistheorie von Ch. S. Peirce, die in der mathematikdidaktischen Diskussion in den letzten Jahren zunehmend Interesse gefunden hat. Eine semiotische Herangehensweise an das Problem des Lernens bietet sich, wie Hoffmann (2001) entfaltet, aus verschiedenen Gründen an. Zum einen ist jede Kommunikation und jede Repräsentation von Wissen auf Zeichen angewiesen. Daher liegt es nahe, die Rolle von Zeichen in Lernprozessen genauer zu untersuchen. Zum anderen könnte die Semiotik einen theoretischen Rahmen bereitstellen, der es erlaubt, konstruktive und rezeptive Momente des Lernens zu verbinden und dadurch zwischen Dichotomien zu vermitteln, die aus mathematikdidaktischer Sicht problematisch sind.

Es erscheint daher reizvoll, das von Artmann und Törner entwickelte Kurkonzept aus semiotischer Perspektive genauer zu betrachten. Aus Zeit- und Platzgründen beschränken wir uns hierbei auf das erste Kapitel. Dazu entfalten wir zunächst Grundzüge einer semiotischen Erkenntnistheorie und orientieren uns dabei an der Darstellung von Hoffmann (2005).

2. Grundzüge einer semiotischen Erkenntnistheorie

Ch. S. Peirce vertritt eine am Begriff der Tätigkeit orientierte Philosophie der Mathematik. In deren Zentrum stehen der Begriff des Diagramms und das Konzept des diagrammatischen Schließens. Die Rolle von sichtbaren Repräsentationen als Mittel der Erkenntnisgewinnung ist dafür wesentlich.

Diagramme sind die für die mathematische Erkenntnistätigkeit maßgebenden internen oder externen Darstellungen. Dabei kann es sich um geometrische Figuren, Graphen, Formeln oder Matrizen handeln, aber auch ein Satz, ein Urteil oder ein logischer Schluss ist ein Diagramm. Es handelt sich also um einen sehr weit gefassten Begriff, den wir zunächst genauer charakterisieren wollen.

Diagramme werden gemäß den allgemein akzeptierten Regeln eines bestimmten Darstellungssystems konstruiert. Diese können explizit oder unmittelbar („kollateral“ in der Diktion von Peirce) gegeben sein wie z. B. die Alltagssprache, und sie können das Denken präzise definieren oder nur vage bestimmen. Jedenfalls nimmt man zum Zeitpunkt der Diagrammatisierung an, dass diese Regeln ein konsistentes System bilden, d.h. dass sie in einem widerspruchsfreien Zusammenhang stehen. Hierin ist die „Unausweichlichkeit“ mathematischen Schließens angelegt. Regeln und Konventionen – z. B. die Syntax einer natürlichen oder künstlichen Sprache oder die Axiome einer mathematischen Theorie – bestimmen auch den Gebrauch von Diagrammen und definieren, welche Transformationen eines Diagramms zugelassen sind und welche nicht. In Form von Inskriptionen, also als „konkret hingeschriebene Objekte“ (Törner 1982, s.o.) treten uns Diagramme in materialisierter, wahrnehmbarer Form gegenüber (Dörfler 2006).

Die Entstehungsweise und die Handhabung von Diagrammen haben bestimmte erkenntnistheoretische Implikationen.

Diagramme sind zunächst ikonischer Natur, d.h. sie rufen einen Eindruck von Ähnlichkeit zwischen Zeichen und Bezeichnetem wach. Diese besteht darin, dass in einem Diagramm relationale Strukturen abgebildet werden. Aufgrund ihres konventionellen Charakters sind Diagramme aber mehr als Ikone. Sowohl für den Konstrukteur eines Diagramms wie auch für den Interpreten ist es entscheidend, dass er über die entsprechenden Konventionen verfügt, die es erlauben, ein Diagramm als solches und nicht nur als ein Ikon zu sehen. In einem Diagramm kann „Wissen von Kulturen“ codiert sein.

Insofern Diagramme Relationen repräsentieren, deren Relata variabel sind, also Möglichkeiten repräsentieren, sind sie offen für Interpretationen und erleichtern es, die inhärenten Relationen spielerisch zu verändern – z. B. ein Vorzeichen umzudrehen oder einen zusätzlichen Faktor in Betracht zu ziehen. Diagramme eröffnen somit kreative Spielräume. Sie erlauben Assoziationen und rufen andere ikonisch darstellbare Ideen hervor, die z. B. bei der Lösung eines Problems helfen können.

Nach Peirce ist alles proportional verfasste Denken ein Denken in Diagrammen. Das Experimentieren mit Diagrammen erhält den Charakter logischen Schließens, weil seine Ergebnisse durch die Regeln des Darstellungssystems bestimmt sind. In dieser Erkenntnistätigkeit treffen eine „objektive“ und eine subjektive Komponente aufeinander. Die objektive Komponente besteht darin, dass Diagramme eigenständige „semiotische Welten“ darstellen, die durch die Rationalität des gewählten Darstellungssystems mehr oder weniger determiniert sind. Die subjektive Komponente besteht darin, dass der Umgang mit den Zeichen und Darstellungssystemen Freiheitsräume und damit kreative Spielräume eröffnet. Diese betreffen die Auswahl und Konstruktion von Darstellungssystemen, Strategien des Experimentierens sowie Möglichkeiten, das System weiter zu entwickeln, neue und unterschiedliche Interpretationen zu finden und es auch metaphorisch zu verwenden, also in neue Kontexte zu übertragen.

Das *diagrammatische Schließen* als die wesentliche mathematische Erkenntnistätigkeit hat dann folgende Schritte:

- ein Diagramm konstruieren;

- mit diesem Diagramm experimentieren, Ergebnisse beobachten und notieren, sich vergewissern, dass ähnliche Experimente ähnliche Resultate haben würden;
- dies in allgemeinen Begriffen zum Ausdruck bringen.

Die *Möglichkeiten der Erkenntnisentwicklung* ergeben sich aus der Interpretation und Transformation vorhandener und der Entwicklung neuer Darstellungsmittel:

- Die Entfaltung von Implikationen gegebener Darstellungsmittel macht sichtbar, was verborgen in den Diagrammen schon angelegt ist und erzeugt damit abgeleitetes Wissen.
- Die kreative Veränderung des Darstellungssystems selbst, z. B. durch Hinzufügen neuer Mittel oder durch Schaffen einer neuen systematischen Ordnung, erzeugt weitergehendes Wissen.

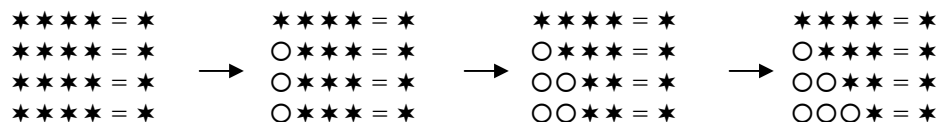
Dabei verwendet jeder Forschungsprozess drei *Grundformen des Schließens*:

- Die *Abduktion* generiert eine neue Idee bzw. findet eine Hypothese angesichts einer erklärungsbedürftigen Tatsache. Sie geschieht spontan, „ohne Zwang“, und enthält ein wesentlich kreatives Moment im Erkenntnisprozess.
- Die *Deduktion* ist notwendiges Schließen. Sie leitet aus der abduktiv gewonnenen Theorie Konsequenzen ab. Auch diese Schlussform enthält kreative Momente, sofern sie Ideen einsetzt, um verborgenes Wissen hervorzuholen.
- Die *Induktion* sucht die experimentelle Bestätigung der abgeleiteten Implikationen und überprüft in der Mathematik letztlich deren Beweisbarkeit.

3. Das Kurskonzept aus Sicht der semiotischen Erkenntnistheorie

Nach einleitenden Bemerkungen beginnt der Kurs mit zwei idealtypischen Problemen aus dem kaufmännischen Bereich, welche auf Systeme linearer Gleichungen führen, einem Mischungsproblem und einer Aufgabe zur innerbetrieblichen Leistungsverrechnung. Damit stehen „Mathematisierungsprozesse als Quelle von Diagrammen“ (Dörfler 2006) am Anfang, wobei die Konstruktion von Diagrammen schrittweise erfolgt. Zunächst werden die Aufgabendaten in einer Tabelle übersichtlich zusammengestellt, im Fall der innerbetrieblichen Leistungsverrechnung wird die Tabelle zusätzlich in einen gewichteten Digraphen zur Erfassung des Leistungsflusses und der zugehörigen Kosten übersetzt. Diese Repräsentationen, die je für sich als Diagramme bestimmte Aspekte des Problems abbilden, vermitteln zwischen der Sachsituation und dem eigentlichen Mathematisierungsziel, dem zu erstellenden Gleichungssystem, das ein mathematisches Modell der Situation darstellt und als eigenständiges Objekt weiter untersucht wird.

Das Herstellen der Normalgestalt basiert auf einer ersten zu beobachtenden Gesetzmäßigkeit, die in eben dem Begriff „Normalgestalt“ ihren allgemeinen Ausdruck findet. Der Hinweis auf die tatsächlich mögliche Größe von Gleichungssystemen in realen Anwendungen belegt die Notwendigkeit eines schematischen Lösungsverfahrens. Dieses wird anknüpfend an das aus der Mittelstufe bekannte Additionsverfahren als Gauß-Algorithmus entwickelt und an geeignet gewählten Beispielen verdeutlicht. Das Verfahren lässt sich allgemein als systematisches Operieren auf dem gegebenen Diagramm beschreiben. Seine wesentliche Idee, die Herstellung einer Dreiecksgestalt, findet ihren exemplarisch auf 4×4 -Systeme bezogenen Ausdruck in einer neuen Inskription, die sinnfällig und doch nur auf der bisher erarbeiteten Wissensgrundlage verständlich ist:



Die Lösung eines linearen Gleichungssystems in Dreiecksform durch Rückeinsetzen wird als eine fortgesetzte, wenn auch verschleierte Anwendung des Gauß-Algorithmus ausgewiesen. Hierfür ist eine geeignete Interpretation der vorhandenen Darstellungsmittel erforderlich. Der ebenfalls exemplarisch für 4×4 -Systeme geführte Nachweis, dass die Schritte des Gauß-Algorithmus Äquivalenzumformungen sind, vollzieht die erste umfangreichere Deduktion von Konsequenzen aus dem gewonnenen Verfahren. Der Beweis ist für den Insider elementar, enthält aber für Schülerinnen und Schüler ggf. neu zu erlernenden Gepflogenheiten beim Umgang mit Beweisen und basiert damit auf kollateralem Wissen der mathematischen Community, in das die Lernenden erst hineinwachsen müssen. Lernen kann insofern als progressive Teilnahme an einer sozialen Praxis des Gebrauchs von Diagrammen und des diagrammatischen Schließens angesehen werden (Dörfler 2006).

Da der Gauß-Algorithmus nur mit den Koeffizienten eines Gleichungssystems arbeitet, empfiehlt es sich, lediglich das Zahlenschema der Koeffizienten zu notieren. Durch diese ökonomische Erwägung ist eine Modifikation des Darstellungssystems, nämlich der Übergang zur Matrix-Vektor-Schreibweise nahe gelegt. Sie stellt, wie sich im Verlauf des Kurses zeigen wird, in stenographischer Notation zwei universell einsetzende Sprachmittel zur Verfügung: Vektoren als n -stellige Listen und Matrizen als (m,n) -stellige Zahlenschemata. Jedoch sind wegen dieser stenographischen Kürze ähnlich wie bei Zahldarstellungen im Stellenwertsystem zusätzliche Regeln zu beachten: Die Reihenfolge der Unbekannten muss von vornherein festgelegt und dann festgehalten werden, und Nullen sind stets hinzuschreiben.

In diesem veränderten Darstellungssystem lässt sich die alte Schreibweise für ein lineares Gleichungssystem mit Koeffizienten und Variablen als Matrix-Vektor-„Multiplikation“ nach bestimmten Regeln herstellen. Durch diese neue Verknüpfung werden Matrizen und Vektoren zu eigenständigen Rechenobjekten. Die abkürzende Schreibweise

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad (*)$$

unterstützt den Objektcharakter und erreicht eine „neue diagrammatische Schicht“ (Dörfler 2003), die eigene Möglichkeiten eröffnet:

- Mit den gewonnenen Sprachmitteln lässt sich das Lösen eines linearen Gleichungssystems zu im Kontext einer binären Operation interpretieren. Es bedeutet nichts anderes, als die Lösung der Matrix-Vektor-Gleichung (*) anzugeben. Ein Vektor \vec{z} ist genau dann eine Lösung der Gleichung, wenn das Matrix-Vektor-Produkt von A mit \vec{z} den Lösungsvektor \vec{b} liefert.
- Zur Entfaltung der Implikationen des Darstellungssystems gehört es, spezielle Matrizen und Vektoren (Einheitsmatrix, Nullmatrix, i -ter Einheitsvektor) zu betrachten, ihr Verhalten in der Matrix-Vektor-Multiplikation zu erforschen und entsprechende Regeln zu formulieren. Das Experimentieren mit der Matrix-Vektor-Multiplikation führt auch auf die Beobachtung neuer Phänomene wie die Existenz von Nullteilern.
- Die neue Operation kann auch in Bezug auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede zum Rechnen mit (reellen) Zahlen betrachtet werden und vertiefte Einsicht in die üblichen Rechengesetze von \mathbb{R} ermöglichen.
- Schließlich können die für die Matrix-Vektor-Multiplikation festgestellten Beziehungen „in einer Form von Protokollen“ (Dörfler 2003) mit Hilfe von Formeln, die wieder neue Diagramme darstellen, festgehalten werden, so z. B. die Linearitätseigenschaften

$$A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y}, \quad A(r\vec{x}) = r(A\vec{x}),$$

aus denen wiederum spezielle Eigenschaften für homogene Gleichungssysteme hergeleitet werden können.

Die zugehörigen Übungsteile enthalten wie die Erarbeitungsteile wesentliche Tätigkeiten, die zum diagrammatischen Denken gehören (zu der folgenden Aufstellung s. Dörfler 2006):

- Das Manipulieren von Diagrammen nach gegebenen Regeln, z. B. die numerische und algebraische Ausführung von Matrix-Vektor-Operationen und das Lösen von konkret gegebenen Gleichungssystemen nach dem Gauß-Algorithmus. Diese dienen dem Vertrautwerden mit den Operationen und ihren internen Eigenschaften, sie vermitteln technisch-handwerkliche Versiertheit im Umgang mit diesen und unterstützen das Erkennen von Gesetzmäßigkeiten und Beziehungen. Unter dem Aspekt der Binnendifferenzierung im Unterricht sollte diese Tätigkeitsebene von allen Schülerinnen und Schülern beherrscht werden.
- Das Experimentieren mit Diagrammen und das Erforschen ihrer Eigenschaften, z. B. Matrizen mit bestimmten Eigenschaften suchen, Folgerungen aus den Linearitätseigenschaften ziehen und diese bei Berechnungen vorteilhaft nutzen, die Wirkung einer Diagonalmatrix bei Multiplikation mit einem Vektor untersuchen und in Worten beschreiben.
- Untersuchen von Beziehungen zwischen verschiedenen Typen von Diagrammen, z. B. das Übersetzen zwischen Tabellen oder Graphen einerseits und Gleichungssystemen andererseits bei der Lösung von Anwendungsproblemen.
- Erfinden und Entwerfen von Diagrammen, z. B. beim Aufstellen von Gleichungssystemen zur Modellierung von Anwendungssituationen.

4. Résumé

Die Analyse sollte zeigen, in welcher differenzierter und zugleich handfester Weise der untersuchte Kurs die Schülerinnen und Schüler in Prozesse der mathematischen Wissensbildung einführt.

Literatur:

Artmann, B. & Törner, G. (1980): Lineare Algebra. Grund- und Leistungskurs. – Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Artmann, B. & Törner, G. (1984): Lineare Algebra und Geometrie. Grund- und Leistungskurs. 2., neubearb. Aufl. – Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht

Dörfler, W. (2003): Diagrammatisches Denken in der Linearen Algebra. – Henn, H.-W. (Hrsg.): Beiträge zum Mathematikunterricht 2003. Hildesheim, Berlin: Franzbecker, 189-192.

Dörfler, W. (2006): Diagramme und Mathematikunterricht. – Journal für Mathematik-Didaktik 27, H. 3/4, 200-219.

Hoffmann, M. H. G. (2001): Skizze einer semiotischen Theorie des Lernens. – Journal für Mathematik-Didaktik 22, H. 3/4, 231-251.

Hoffmann, M. H. G. (2005): Erkenntnisentwicklung. Ein semiotisch-pragmatischer Ansatz. – Frankfurt am Main: Vittorio Klostermann.

Hoffmann, M. H. G. (2006): Semiotik in der Mathematikdidaktik. – Journal für Mathematik-Didaktik 27, H. 3/4, 171-179.

Strang, G. (1976): Linear Algebra and its Applications. – New York: Academic Press.

Törner, G. (1982): Erfahrungen und Bemerkungen zu Kursen in Linearer Algebra. – Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 35, H. 6, 321 – 325.