Verschiedene Perspektiven zur Verbindung von Literatur und Mathematik

von Astrid Beckmann und Bharath Sriraman

Teil I: Hintergrund

I.1 Fächerübergreifender Mathematikunterricht mit Deutsch/Sprache

Denkt man an fächerübergreifenden Mathematikunterricht fallen einem vermutlich zunächst die naturwissenschaftlichen Bezüge ein und vielleicht die Bedeutung der Mathematik in der Wirtschaft; kaum einer denkt wohl an einen fächerübergreifenden Unterricht zwischen Deutsch/Sprache und Mathematik. Während Naturwissenschaften und Mathematik viele methodische und auch inhaltliche Gemeinsamkeiten haben, unterscheiden sich Mathematik und Sprache/Deutsch sehr.

Ein entscheidender Unterschied zwischen Mathematik- und Deutschunterricht betrifft ihre Bezugswissenschaften. Während sich der Mathematikunterricht auf die Mathematik bezieht, bezieht sich der Deutschunterricht auf die Germanistik. Germanistik ist eine *hermeneutische* Wissenschaft. In der Hermeneutik geht es darum „einen Sinnzusammenhang aus einer anderen ‚Welt' in die eigene zu übertragen" (Gadamer in Jung 1997, S. 159, Beckmann 2003b, S. 8). Der hermeneutische Hintergrund des Deutsch/Sprachunterrichts zeigt sich besonders darin, dass ein Lerngegenstand des Deutschunterrichts die Literatur ist. Ausgangspunkt des Unterrichts sind literarische Texte, wobei es heute allerdings keinen literarischen Kanon mehr gibt. Verbreitet sind höchstens Leselisten mit einer (zum Teil extrem umfangreichen) Literaturauswahl. „Nicht was gelesen werden soll, steht im Zentrum, sondern *welche Funktion dem Wissen* zukommt über das, was an literarischen Kenntnissen vorhanden sein sollte" (Paefgen 1999, S. 64). Die Kriterien für die Auswahl der Literatur ist vielseitig: Nach Willenberg zum Beispiel sind dies die *kognitiven Fähigkeiten* der Schülerinnen und Schüler, die *Inhalte/Themen* des Textes und die *Emotionen* (Frtizsche 2000, S. 124 f.).

Aus Sicht des Mathematikunterrichts ist Literatur als Unterrichtsgegenstand oder als Gegenstand einer Auseinandersetzung eher fremd (ein *Fremdaspekt* nach Beckmann 2003a). In der Relativität des Kanons und der Auswahlaspekte liegt eine Chance für die Kooperation mit dem Deutsch-/Sprachunterricht. Denn es eröffnet die Möglichkeit auch Texte auszuwählen, die mathematisch (wie auch immer, vgl. unten) interessant sein können.

Dass es mathematisch interessante Texte gibt, soll im Folgenden dargestellt und an Hand von erprobten Unterrichtsbeispielen verdeutlicht werden. Die Gliederung erfolgt nach unterschiedlichen Perspektiven, aus denen auf die Texte gesehen wird. Es ergeben sich jeweils unterschiedliche Chancen für einen fächerübergreifenden Mathematikunterricht.

I.2 Mathematik und Literatur

Mathematik kann in Literatur in unterschiedlicher Ausprägung und in unterschiedlichen Zusammenhängen auftreten (Beckmann 1995 und 2003b). Die Absichten, die mit dem in der Literatur anzutreffenden mathematischen Bezug verfolgt werden, unterscheiden sich. Radbruch zeigte, dass sie zum Teil auch für die betreffende Epoche typisch sind (Radbruch 1997).

I.2.1 Mathematik im literarischen Werk

Ein Stöbern in literarischen Texten zeigt, dass es zahlreiche Werke gibt, in denen Mathematik auftritt. In der Regel ist das Auftreten beiläufig, kurz und betrifft nur einen kleinen Ausschnitt. Meist spielt die Mathematik für den Fortgang der Handlung auch kaum eine Rolle.

In THOMAS MANNS *Der kleine Herr Friedemann* findet sich zum Beispiel folgendes Nebenthema: „Auch ein Student der Mathematik war anwesend, ein Neffe des Oberstleutnants, der bei seinen Verwandten zu Besuch war … Gleich rechts von der Tür saß um einen kleinen Tisch ein Kreis, dessen Mittelpunkt von dem Studenten gebildet ward, der mit Eifer sprach. Er hatte die Behauptung aufgestellt, dass man durch einen Punkt mehr als eine Parallele zu einer Geraden ziehen könne, Frau Rechtsanwalt Hagenström hatte gerufen: ‚Dies ist unmöglich!' und nun bewies er es so schlagend, dass alle taten, als hätten sie es verstanden." (nach RADBRUCH 1997, S. 165 f.).

HERMANN HESSE schreibt in Peter Camenzind: „‚Peter Camenzind', sprach der Mathematiklehrer, ‚du bist ein Genie im Faulenzen, und ich bedaure, dass es kein niedrigeres Zeugnis gibt als Null. Ich schätze deine heutige Leistung auf minus zweieinhalb.' "

In JULES VERNES *Fünf Wochen im Ballon* findet sich die folgende Aufgabe:
„Wenn die Zahl der vom Doktor auf seinen Reisen um die Welt zurückgelegten Meilen gegeben ist, einen wie viel weiteren Weg hat dann – in Anbetracht des größeren Radius – sein Kopf zurückgelegt als seine Füße? Und weiter: Wenn die Zahl der von den Füßen und dem Kopf des Doktors hinter sich gebrachten Meilen bekannt ist, möge man daraus seine Körpergröße bis auf den Zentimeter genau berechnen" (vgl. LEHMANN 1993, S. 74).

Seltener sind literarische Stücke, in denen die Mathematik das Stück trägt und sogar hermeneutisch von Bedeutung ist.

Ein Beispiel ist THEODOR STORMS Novelle *Der Schimmelreiter*. Darin wird der tragische Kampf des Deichgrafen Hauke Haien geschildert, der versucht gegen den Widerstand seiner Umgebung dem Deichbau eine theoretische, fachwissenschaftlich abgesicherte Basis zu geben. Er scheitert, da er seine mathematische Begabung und Fähigkeit nicht in das soziale Umfeld integrieren kann. Die Mathematik wird hier literarisch genutzt, um besonders deutlich auf das Problem individualistischer Vereinzelung hinführen zu können (RADBRUCH 1997, BECKMANN 1994, 1995).

Daneben gibt es zahlreiche *kurze* Gedichte, in denen ein mathematischer Begriff zentral ist oder das Gedicht mathematische Kenntnisse zum Verständnis anspricht (vgl. auch Gedichtsammlung unter **www.matex.net.tc**, BECKMANN 2003b, S. 119 ff., BECKMANN 2003c) (Beispiele siehe **Kasten 1**).

I.2.2 Der Mathematische Roman als literarisches Werk

Im Unterschied zu dem vereinzelten und zum Teil beiläufigen Auftreten von Mathematik in literarischen Texten, wie es die obigen Beispiele zeigen, kann Mathematik selbst Grundlage und Ausgangspunkt für ein literarisches Stück sein, das dann bewusst um das mathematische Thema herum konstruiert wird. Frühe Beispiele sind insbesondere Stücke für Kinder wie „What comes in 2s, 3s, 4s" hier zum Thema Zahlentwicklung (FRASER 1993) sowie die bekannten Geschichtssammlungen von GARDENER und STEWART in „Scientific American" bzw. „Pour la Sience", in denen mathematische Inhalte in unterhaltsame Geschichten verpackt wurden (z. B. STEWART 1995, 1997 usw.). Die in den Sommerworkshops „Mathematische Erzählungen und mathematisches Theater" in Klagenfurt entstandenen mathema-

Christian Morgenstern

Die Zwei Parallelen

Es gingen zwei Parallelen
Ins Endlose hinaus,
zwei kerzengerade Seelen
und aus solidem Haus.

Sie wollten sich nicht schneiden
Bis an ihr seliges Grab:
Das war nun einmal der beiden
Geheimer Stolz und Stab.

Doch als sie zehn Lichtjahre
Gewandert neben sich hin,
da wards dem einsamen Paare
nicht ordisch mehr zu Sinn.

War'n sie noch Parallelen?
Sie wussten 's selber nicht, –
Sie flossen nur wie zwei Seelen
Zusammen durch ewiges Licht.

Das ewige Licht durchdrang sie,
da wurden sie eins in ihm;
die Ewigkeit verschlang sie,
als wie zwei Seraphim.

SCHULTE 1976, S. 136

Erich Kästner

Mitleid und Perspektive oder Die Ansichten eines Baumes

Hier, wo ich stehe, sind wir Bäume,
die Straße und die Zwischenräume
so unvergleichlich groß und breit.
Mein Gott, mir tun die kleinen Bäume
Am Ende der Allee entsetzlich leid!

BECKMANN 1995

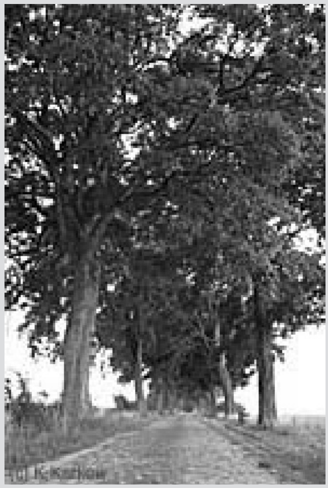

Abb. 1: www.nabu-mv.de

Kasten 1

tischen Texte, die insbesondere auch der szenischen Darstellung dienten, gehören ebenfalls dazu (HEFENDEHL-HEBEKER&WILLE 1987).

In den letzten Jahren ist speziell in der englischsprachigen Welt ein bemerkenswerter Schub bzw. eine Bewegung in Richtung einer Popularisierung von Mathematik auf allen Ebenen zu verzeichnen. Dies betrifft auch den literarischen Bereich. Tatsächlich ist zur Zeit das Genre des naturwissenschaftlichen und mathematischen Romans die am stärksten wachsende Literaturgattung in Nord-Amerika. Typisch für diese Bücher ist, dass sie den historischen, biografischen oder kulturellen Kontext eines ausgewählten mathematischen Problems (wie KEPLERS Vermutung oder RIEMANNS Hypothese) oder eines mathematischen Inhalts (wie in ENZENSBERGERS Zahlenteufel, ENZENSBERGER 1997) beschreiben, einschließlich völlig erdachter Geschichten wie zum Beispiel „PARROT's Theorem" (GUEDJ 2000).

Ein bekanntes Beispiel ist Flatland von EDWIN ABBOTT (ABBOTT 1994). Im Vorwort heißt es:

„The first objection is, that a Flatlander, seeing a Line, sees something that must be thick to the eye as well as long to the eye (otherwise it would not be visible, if it had not some thickness); and consequently he ought (it is argued) to acknowledge that his countrymen are not only long and broad, but also (though doubtless to a very slight degree) thick or high. This objection is plausible, and, to Spacelanders, almost irresistible, so that, I confess, when I first heard it, I knew not what to reply. But my poor old friend's answer appears to me completely to meet it.

‚I admit,' said he -- when I mentioned to him this objection -- ‚I admit the truth of your critic's facts, but I deny his conclusions. It is true that we have really in Flatland a Third unrecognized Dimension called ‚height,' just as it also is true that you have really in Spaceland a Fourth unrecognized Dimension, called by no name at present, but which I will call ‚extra-height.' But we can no more take cognizance of our ‚height' than you can of your ‚extra-height.' Even I -- who have been in Spaceland, and have had the privilege of understanding for twenty-four hours the meaning of ‚height' -- even I cannot now comprehend it, nor realize it by the sense of sight or by any process of reason; I can but apprehend it by faith …' "

Teil II: Perspektive: Literatur als Anstoß für mathematische Inhalte und Aktivitäten

II.1 Literatur zur Motivation von mathematischen Inhalten

Das oben zitierte Gedicht Ansichten eines Baumes von Erich Kästner kann gelesen werden, ohne sich mit Mathematik zu beschäftigen. Um es zu verstehen, benötigt es allerdings der Kenntnis von Perspektive, wonach gleich große, aber unterschiedlich weit entfernte Gegenstände unterschiedlich groß erscheinen. Im Mathematikunterricht könnte das Gedicht zur Darstellung einer Baumreihe gleich hoher Bäume in Zentralprojektion anregen. Folgende Fragen können entsprechende Aktivitäten anregen (**www.matex.net.tc**)

- Das Gedicht beschreibt die Ansicht eines Baumes. Welche Ansicht ist das?
- Inwieweit hat der Baum Recht bzw. warum irrt er?
- Kannst du die beschriebene Situation
  a) skizzieren
  b) konstruktiv darstellen? Welches Verfahren benötigst du?
- Welches allgemein menschliche Problem wird durch das Gedicht angesprochen?

Das Gedicht *Das Quadrat* von Johannes Trojan behandelt den Begriff Quadrat. In einer unterrichtlichen Erprobung[1] wurde es genutzt, um die systematische Ordnung von Vierecken (gemäß Haus der Vierecke) anzuregen (s. **Kasten 2**).

Aus dem Unterricht (Annen 2006):
Zu Beginn der Doppelstunde wurde das Gedicht den Schülerinnen und Schülern als „stiller Impuls" auf einer Folie präsentiert. Die Worte „Quadrat" waren zuvor im Text gelöscht worden. Nach einem kurzen Austausch über Textform und Thema (Das Thema Quadrat war sofort erkannt worden) erhielten die Schülerinnen und Schüler den Text auf Papier und die Aufgabe, die im Text genannten Eigenschaften des Quadrats zu unterstreichen und sodann daraus ein Quadrat zu konstruieren. Anschließend bearbeiteten die Schülerinnen und Schü-

Johannes Trojan

Das Quadrat

Laßt uns das Quadrat betrachten,
denn das ist dem Geist gesund.
Höher müssen wir es achten,
Als den Kreis, der gar zu rund.

Niemand kann es ihm bestreiten,
Daß es ist an Tugend reich.
Denn es hat vier gute Seiten,
Und sie sind einander gleich.

Ohne jeden falschen Dünkel
Steht es da auf dem Papier.
Denn es hat nur rechte Winkel
Und besitzt derselben vier.

Manchen Vorzug hat ’s unstreitig,
den beim Dreieck man vermißt,
Und erfreut auch anderseitig,
Weil es so symmetrisch ist.

Ja, zur Lust der Weltbewohner
Ist ’s geschaffen in der That.
Reinlicher und zweifelsohner
Ist wohl nichts als das Quadrat.

TROJAN 1979

Kasten 2

Beispiel aus einem Präsentationsblatt:

Beschreibung der geänderten Eigenschaften bzw. der gefundenen Figuren:
- keine rechten Winkel, keine Symmetrieachsen
- 5-Eck mit einer Symmetrieachse*
- Rechteck
- Keine vier gleich langen Seiten

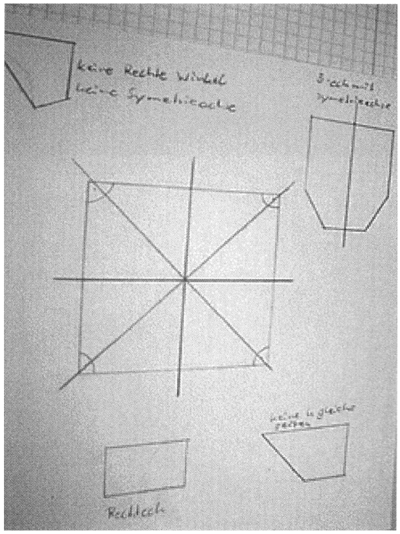

Abb. 3

* Da die Aufgabe offen gestellt war, wurde zum Teil auch die Eigenschaft der Anzahl der Ecken verändert.

Kasten 3

ler in Gruppen die Frage, welche Flächen sich ergeben, wenn einzelne Eigenschaften des Quadrats verändert bzw. nicht gefordert werden. Diese offene Aufgabe führte auf zahlreiche Ideen. Zum Abschluss der Doppelstunde präsentierte jede Gruppe einen Vorschlag. Dabei wurden die Eigenschaften der neuen Figuren noch einmal im Vergleich zum Quadrat diskutiert, zum Beispiel auch, welche Wirkung eine einzelne Änderung zum Beispiel bezüglich der Seitenlängen auf die Symmetrieeigenschaften hat usw. (**Kasten 3**)

II.2 Der literarische Text als Ausgangspunkt für ein lebendiges mathematisches Verständnis

Gallin und Ruf haben mit ihrem Buch „ich, du, wir" wohl das erste fächerverbindende Lehrbuch für Deutsch- und Mathematikunterricht geschaffen[2]. In verschiedenen Kapiteln besprechen sie Themen des Deutsch- und des Mathematikunterrichts (Gallin&Ruf 1995 – 1999). In dem Kapitel „Vergrößern und Verkleinern" zum Beispiel wird Literatur als (fast) durchgängiges Lehrgangsmaterial genutzt, und zwar die „Sage des Prokrustes" und insbesondere „Alice im Wunderland" von dem englischen Mathematiker Lutwidge Dodgson (Lewis Carrol). Die Idee „Alice im Wunderland" im Mathematikunterricht zu nutzen, ist durchaus nicht neu und wird in verschiedenen, insbesondere australischen und neuseeländischen Veröffentlichungen erwähnt (Kliman 1993). Das Besondere an Gallins und Rufs Ausarbeitung ist jedoch die Konkretisierung der Idee, wobei das Märchen als Anregung für spezielle mathematische Fragen und daraus erwachsende Handlungen genutzt wird (vgl. Beckmann 2003b, S. 78 ff.). Die Nutzung des Märchens im Mathematikunterricht soll dabei helfen, „eine lebendige Vorstellung des Vergrösserns und Verkleinerns aufzubauen, bei der es um die Wahrung der Proportionen geht", aber auch dabei, eine eigene Vorstellung der Multiplikation zu bilden, nämlich „Multiplikation als kontinuierliches Strecken" und sich damit davon zu lösen, Multiplikation als „fortgesetzte Addition" zu verstehen (Gallin&Ruf 1999, S. 463).

In einem Unterrichtsversuch von Beckmann wurde das Gedicht *Von Katzen* von Theodor Storm eingesetzt, um eine lebendige Vorstellung vom exponentiellen Wachstum zu entwickeln (Beckmann 1999) (s. **Kasten 4**).

Aus dem Unterricht:
Das Gedicht war in einer 11. Klasse als offene Aufgabenstellung zum Einstieg in das Thema *Exponentialfunktion* präsentiert worden. Es regte sofort Modellbildungsprozesse an, bei denen es um die mathematische Beschreibung der Situation mit dem Ziel von Zukunftsaussagen ging. Deutlich wurde die Notwendigkeit von Grundannahmen, die in zum Teil heftigen und humorvollen Diskussionen in den Arbeitsgruppen jeweils gemeinsam festgelegt wurden. Die Schülerinnen und Schüler erhielten Informationen zum Gebärverhalten von Katzen, so dass sie ihr Modell auch an der Realität orientieren konnten. Eine Gruppe entwickelte ein lineares Modell, das Sterbefällen berücksichtigte. Die meisten Schülerinnen und Schüler entschieden sich aber für eine konstante Geburtenrate (k oder 7) ohne Katergeburten und Sterbefälle (vgl. **Abb. 2**). Dies kam der überzeichneten Situation im Gedicht mit Storms „Notsituation" am Ende am nächsten.

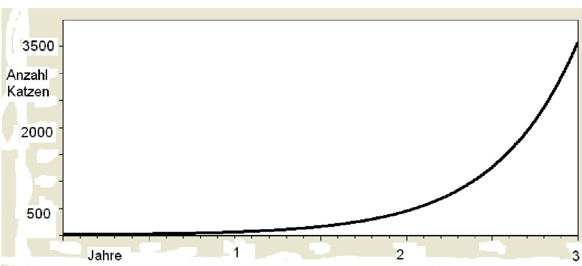

Abb. 2: Anzahl der Katzen K nach n Jahren (als Exponentialfunktion $K(n) = 7 \cdot 8^x$)
$K(0) = 7, K(1) = 7 \cdot 8 + 7 = 56,$
$K(21) = 56 \cdot 7 + 56 = 448,$
$K(3) = 448 \cdot 7 + 448 = 3584$

Theodor Strom

Von Katzen

Vergangenen Maitag brachte meine Katze
Zur Welt sechs allerliebste kleine Kätzchen.
Maikätzchen, alle weiß mit schwarzen Schwänzchen.
Die Köchin aber – Köchinnen sind grausam,
Und Menschlichkeit wächst nicht in der Küche –
Die wollte von den sechsen fünf ertränken.
Fünf weiße schwarzgeschwänzte Maienkätzchen
Ermorden wollte dies verruchte Weib,
Ich half ihr heim! – Der Himmel segne
Mir meine Menschlichkeit! Die lieben Kätzchen,
Sie wuchsen auf, und nachts vor ihrem Fenster
Probierten sie die allerliebsten Stimmchen.
Ich aber, wie ich sie so wachsen sehe,
Ich preis mich selbst und meine Menschlichkeit. –
Ein Jahr ist um, und Katzen sind die Kätzchen,
Und Maitag ist 's! – Wie soll ich es beschreiben,
Das Schauspiel, das sich jetzt vor mir entfaltet!
Mein ganzes Haus, vom Keller bis zum Giebel,
Ein jeder Winkel ist ein Wochenbettchen!
Hier liegt das eine, dort das andre Kätzchen,
In Schränken, Körben, unter Tisch und Treppen,
Die Alte gar – nein, es ist unaussprechlich,
Liegt in der Köchin jungfräulichem Bette!
Und jede, jede von den sieben Katzen
Hat sieben, denkt euch! Sieben junge Kätzchen,
Maikätzchen, alle weiß mit schwarzen Schwänzchen!
Die Köchin rast, ich kann der blinden Wut
Nicht Schranken setzen dieses Frauenzimmers;
Ersäufen will sie alle neunundvierzig!
Mir selber, ach mir läuft der Kopf davon –
O Menschlichkeit, wie soll ich dich bewahren!
Was fang ich an mit sechsundfünfzig Katzen!-

Storm in Conrady 1977

Kasten 4

Zum Ende des Unterrichts konnten die Schülerinnen und Schüler die allgemeine Gleichung der Exponentialfunktion formulieren und sie hatten einen ersten Einblick in den grafischen Verlauf gewonnen. Dabei erwies sich die im Gedicht so pointierte Darstellung des Wachstums der Anzahl der Katzen beim Erfassen des speziellen Steigungsverhaltens von Exponentialfunktionen als besonders wirkungsvoll. Erwähnt sei noch, dass das Entdecken der Exponentialfunktion durch das Gedicht die Diskussion über das Auftreten von realen Wachstumsvorgängen anregte. Die weitere Beschäftigung mit dem Thema war motiviert.

Die zahlreichen Beispiele, in denen Mathematik in Literatur auftaucht bzw. entdeckt werden kann (vgl. RADBRUCH 1997, BECKMANN 2003b), dürfen nicht darüber hinwegtäuschen, dass die Beachtung des mathematischen Hintergrunds literaturdidaktisch keineswegs unproblematisch ist. Durch die analytische, ggf. interpretative Prüfung des literarischen Texts kann ein individuelles, gefühlsmäßiges Herangehen an den Text verhindert werden. Nach der ästhetisch-rezeptionstheoretischen Richtung erfordert die mathematische Behandlung von Literatur vor der mathematischen Analyse eine ästhetische Kommunikation im Sinne der Literaturdidaktik. Vor diesem Hintergrund sind Texte auch immer erst auf ihre Eignung zu prüfen. Die Mathematik darf in der Regel nicht als allgemeingültiger Hintergrund des Textes verstanden werden und sollte ggf. sogar als zusätzliches Phantasiekonstrukt kenntlich gemacht werden. In einer Kooperation mit dem Literaturunterricht wird dies erfüllt, indem Mathematik die literarische Rezeption nicht stört, sondern sich eine gegenseitige Bereicherung ergibt.

II.3 Der mathematische Roman als Ausgangspunkt für vertiefte mathematische Gespräche

Während literarische Werke, in denen Mathematik auftritt, sich nicht immer oder nicht immer unkompliziert für eine mathematische Beschäftigung eignen, ist dies bei der sich insbesondere im englischsprachigen Ländern ausbreitenden Literaturgattung des *mathematischen Romans* eher unproblematisch. Mathematische Inhalte sind hier bewusst integriert und werden mathematisch angemessen präsentiert.

Ein Beispiel ist der Roman *Flatterland* von STEWART (STEWART 2001), der als eine Fortsetzung von *Flatland* (ABBOT 1984, reprint von 1884) gesehen werden kann (vgl. I.2.2). In den achtzehn Kapiteln werden Themenbereiche aus Flatland angesprochen wie Willkür der Dimensionen in Mathematik und fraktale Geometrie; und es werden moderne neue Ideen entwickelt wie Verschlüsselungen im Internet, eine neue Metrik (die „Taxi-cab metrik“) und fraktale Dimensionen. Durch einen zeitgemäßen Handlungsrahmen sind die Ideen einfach zugänglich dargestellt: In der Geschichte wird die Heldin Vikki, die Ur-ur-Enkelin der Hauptfigur aus Flatland A.Square (A-Quadrat), mit einem „Space-hopper“ durch das mathematische Universum geführt.

In einer unterrichtlichen Erprobung hat SRIRAMAN den Roman Flatterland in einer Highschool in den USA eingesetzt (SRIRAMAN 2004). Flatterland diente als Gerüst, um
- nicht-intuitive mathematische Probleme zu erforschen
- das Verständnis der Schülerinnen und Schüler von Dimensionen zu erweitern
- Schülerinnen und Schülern zu einem vertieften Verständnis von fraktaler Geometrie zu verhelfen
- die „Taxi-cab-Geometrie“ zu entwickeln.

Im Folgenden werden Auszüge aus der Erprobung zusammengefasst. Ausführlich sind die Ergebnisse der gesamten Erprobung in (SRIRAMAN 2004) nachzulesen.

Das dritte Kapitel von Flatterland beschreibt, wie Vikki den „Space-hopper“ besichtigt und wie ihr dessen fremde Form auffällt. Im Unterricht erschlossen sich die Schülerinnen und Schüler die fremde Form über eine Folge von Querschnitten. Die Vorstellung einer Kugel, die durch eine horizontale Ebene fliegt, als eine Folge von expandierenden und kontrahierenden Kreisen erweiterten sie auf die Idee des Schattens, den eine 4-dimensionale Hypersphäre auf unsere Welt wirft. Andere Ideen des Buchs waren für die Schülerinnen und Schüler schwieriger zu verstehen. Beispielsweise beschreibt Stewart die nicht-intuitiv erfassbare Möglichkeit, einen Würfel der Seitenlänge 1,06 in einen Einheitswürfel zu passen. Einer der Schüler versuchte dies real mit dünner Pappe nachzubauen, war jedoch erfolglos. In der Diskussion im Klassenverband schlossen die Schülerinnen und Schüler deshalb, dass es praktisch „unmöglich" ist, Instrumente zu finden, um einen Würfel der Seitenlänge 1,06 herzustellen. Die nicht-intuitive Vorstellung, einen größeren Würfel in einen kleineren zu drücken, hielten sie daher für „mathematisch" möglich, aber für praktisch „unmöglich". Im Unterricht regte dies dazu an, über die Notwendigkeit von Kalibrierungen und genauen Messinstrumenten in der Wissenschaft zu diskutieren, so dass mit Hilfe ihrer Daten Hypothesen sicher bestätigt oder widerlegt werden können.

Schwierig wurde auch das Thema Verschlüsselung empfunden. Im Unterricht war dies Anlass zur Einführung des binären Zahlsystems und das Rechnen in ihm. Die Schülerinnen und Schüler fanden dies spannend und erfuhren dadurch die Willkür von Zahlen.

Ein weiteres im Buch angesprochenes Thema ist das „Früchte-Pack-Problem" (Stewart 2001), speziell die Frage, welches die effizienteste Methode ist, um (kugelförmige) Früchte möglichst dicht in Pappquader zu packen. Dieses Problem führte auf die Erforschung von Näherungsverfahren, um die größte Menge Früchte zu bestimmen, die in die Box gepackt werden kann, wenn als Grundannahmen die Maße von Früchten und Box gegeben sind. Im Unterricht wurden die Größen von Äpfeln, Pampelmusen, Kürbissen und Wassermelonen verwendet sowie eine Standardpackung für Obst aus dem Supermarkt. Ein Schüler brachte aus dem Supermarkt einige gelochte Papiere mit, die in Apfelboxen verwendet werden, was die praktische Seite des Pack-Problems veranschaulichte. Eine Schülerkommentare (Sriraman 2004):

> „Es scheint, dass es mathematisch möglich ist, alles zu tun. Ich glaube aber nicht, dass man einen größeren Würfel in einen kleineren tun kann … Aber ich mag die Idee binäre Zahlen zu verwenden, um Buchstaben durch Symbole nur mit 0 und 1 zu verwenden, und es macht Sinn, wie man die Fehler aufdecken kann."

> „Es macht Sinn, immer eine Dimension zu addieren, wenn man etwas in eine andere Richtung bewegen kann. So können wir eine „Kreide-Käse" Richtung haben, so wie Nord-Süd, Ost-West, Hoch-Runter. Die Idee, die Dimension zu finden macht auch Sinn, weil, wenn man einen 3D Ball hat, ist seine Oberfläche 2D, weil $3 - 1 = 2$. Also ist die Oberfläche immer eine Dimension kleiner als die Originaldimension. Also hat ein 101 dimensionaler Ball eine 100D Oberfläche."

> „Die Idee, Kugeln zusammenzustecken, um eine Hypersphäre herzustellen, ist wirklich verrückt. Aber es macht Sinn, wenn man daran denkt, eine Kugel durch das Zusammenstecken von kleineren und größeren Kreisen zu bauen."

Während der Beschäftigung mit dem mathematischen Roman (*Flatland* und *Flatterland*) wurden zahlreiche Fragen untersucht, zum Beispiel ob es reguläre Polygone in der „Taxicap-Geometrie" gibt. Weiterhin wurden verschiedene Formen wie gleichseitige Dreiecke, Quadrate und Kreise in der Taxi-cap-Geometrie untersucht und die Vorstellungen von „zwischen“ in der Euklidischen und der Taxi-cap-Metrik verglichen.

Beispiel aus dem Unterrichtsgespräch (zur Taxi-cap-Geometrie):

Lehrer (L): Wie können wir entscheiden, ob ein Punkt zwischen zwei anderen Punkten liegt?
Schüler (S)1: Man kann die Punkte zeichnen und gucken, ob sie auf der reellen Geraden liegen.
S2: Könnten wir nicht die Mittelpunkt-Formel nehmen?
S1: Aber du kannst nicht sicher sein, dass dieser Punkt genau mittig zwischen den anderen Punkten liegt.
L: Brauchen wir nicht einige Informationen über die Lage der Punkte, um die Mittelpunkt-Formel zu verwenden?
S3: Wie kann man sicher sein, dass die Punkte auf der reellen Geraden liegen? Können die Punkte nicht außerhalb der reellen Geraden sein?
S2: Yeah, wir nehmen (x, y)-Koordinaten, um die Lage der Punkte zu bestimmen.
L: Lasst uns ein Beispiel betrachten. Was ist, wenn wir die Punkte P(3,2), Q(6,4) und R(9,6) nehmen und zeichnen.
S4: Die Punkte liegen auf einer Geraden mit der Steigung $\frac{2}{3}$.
L: Okay, wie können wir nun feststellen, ob Q zwischen P und R liegt?
S1: Zeichne sie einfach und guck, ob Q genau dazwischen liegt.
L: Was ist, wenn wir kein Papier haben und wir die Punkte nicht zeichnen können?
S2: Man kann sie sich im Kopf vorstellen.
L: Können wie die Formeln benutzen, die wir gelernt haben?
S4: Die Mittelpunkt-Formel?
L: Aber können wir immer sicher sein, dass ein Punkt zwischen den anderen liegt?
S5: Warum gucken wir nicht auf die Abstände zwischen den Punkten? …
S6: Berechne PQ, dann QR, und dann guck, ob die Summe PR ist. …
S4: Klappt das immer?
S6: Ich glaube ja. Du kannst es auf der reellen Gerade checken, wenn du willst.
L: Wenn es auf der reellen Geraden klappt, funktioniert es auf jeder Geraden?
S6: Yeah, weil die reelle Gerade ist einfach eine andere Gerade ohne Steigung.

Die Schülerinnen und Schüler berechnen und bestätigen PQ + QR = PR.

L: Können wir nun „Dazwischenliegen“ definieren?
S6: Haben wir bereits. Berechne einfach die drei Abstände und gucke, ob die Summe der kleineren gleich der gesamten Distanz entsprechen.
L: ... nun ist die Frage, ob das genauso in der „Taxi-cap-Geometrie“ funktioniert.
S5: Aber wie können wir dort Abstände berechnen? Brauchen wir das?
Die Diskussion in der Klasse führt darauf, dass Abstände in der Taxicap-Welt berechnet werden, indem die Anzahl der Blöcke in Ost-West und in „Hoch-runter“- Richtung gefahren werden. In Bezug auf den „Zwischen-„Begriff wird die Analogie zur reellen Geometrie erkannt.
S6: Die gleiche Regel, du weißt, dass AB + BC muss gleich AC sein.

Teil III: Perspektive: Die literaturdidaktische (ästhetische/emotionale und kritische) Auseinandersetzung mit mathematischer Literatur

III.1 Ästhetik/Emotionen und Kritisches Denken

Die Entwicklung der Fähigkeit im kritischen Denken ist traditionell eines der Ziele geisteswissenschaftlicher Fächer – auch des Literaturunterrichts, denn eine Möglichkeit zur Förderung des kritischen Denkens ist die Auseinandersetzung mit Literatur. Ein wichtiger Aspekt bei der Begegnung mit Literatur ist aber auch die ästhetische Kommunikation (zwischen Leser und Lektüre) mit ihren emotionalen Anteilen (Kreft 1977). Ästhetik ist hier im Sinne des griechischen Ursprungs Aisthesis als Wahrnehmung, Empfindung, Gefühl, Mitgefühl oder Sensibilität zu verstehen: „Die ästhetische Haltung ist eine der Betrachtung statt des Eingriffs, also ein Sich-ansprechen-lassen, lauschen, schauen." (Fritzsche 2000, S. 165). In der ästhetischen Kommunikation stehen emotionale Empfindungen im Vordergrund. Zusammenfassend ergeben sich folgende Möglichkeiten: „Der literarische Text kann lustvoll und oberflächlich zum Vergnügen gelesen, er kann aber auch akribisch und ausdauernd studiert werden, um das ästhetische Geflecht zu analysieren und Erkenntnisse über seine Struktur und seinen Inhalt zu erlangen" (Paefgen 1999, S. 148).

Ästhetik, Emotionen und kritisches Denken sind aber auch wesentliche Elemente der Mathematik. Der Ausdruck von kritischem Denken hat seinen historischen Ursprung in der Mathematik, und zwar bei der Verbindung ontologischer Fragen zur Natur der Mathematik mit Fragen der Theologie. Daneben hielt Poincaré sogar das Ästhetische, eher als das Logische für das dominierende Element der mathematischen Kreativität (Davis&Hersh 1994); und nach Wagenschein gibt es „keine wissenschaftliche Entdeckung von Format, die nicht von Emotionen begleitet ist" (Wagenschein 1982, S. 67).

Bei den fächerübergreifenden Bemühungen, Literatur auch im Mathematikunterricht zu behandeln, müssen auch diese Überlegungen einbezogen werden. Einerseits kann Literatur zur Motivation und Anregung mathematischer Inhalte und Themen genutzt werden (wie in II beschrieben), andererseits sollte sie aber auch als Ausgangspunkt für ästhetische Kommunikation, Emotionen und zur Ausbildung des kritischen Denkens in Betracht gezogen werden. Eine besondere Chance bietet hier der mathematische Roman (I.2.2), der mathematische Fragen im Zusammenhang mit einer außermathematischen Handlung thematisiert. Bisher gibt es hier kaum Unterrichtsvorschläge bzw. veröffentlichte Erfahrungen aus einem entsprechenden Unterricht. Ein Beispiel beschreibt Sriraman in diesem Heft[3]. Grundlage ist der Roman Flatland (vgl. I.2.2).

Teil IV: Perspektive: Die Auseinandersetzung mit literarischen Texten mit einem „verhängnisvollen Umgang"[4] mit Mathematik

In seinem Buch *Mathematische Spuren in der Literatur* unterscheidet Radbruch vier Möglichkeiten für eine Verwendung von Mathematik in der Literatur: den *humorigen* Umgang mit Mathematik (Heinrich Heine, Wilhelm Busch), den *besonnenen* Umgang mit Mathematik (Adalbert Stifter), den *problematischen* Umgang mit Mathematik (Theodor Storm, vgl. I.2.1) und den *verhängnisvollen* Umgang mit Mathematik (Radbruch 1997).

Während alle Richtungen Motivation für mathematische Inhalte gemäß der Perspektiven nach I und II sein können, sollte die vierte Richtung, der *verhängnisvolle* Umgang mit Mathematik, noch unter einer anderen Perspektive Beachtung finden. Ein verhängnisvoller Umgang mit Mathematik liegt dann vor, wenn literarische Kritik am Mathematikunterricht bzw. an der Mathematik geübt wird und wenn Mathematik, der Mathematikunterricht oder der Mathematiklehrer negativ, unverständlich, abgehoben oder sinnlos erscheint.

> Aus Keller: *Der grüne Heinrich*
> „Die Lehrer der verschiedenen mathematischen Übungen begannen ihren Kurs, mit wenigen Ausnahmen, durch einige magere Worte über den Sinn des Titels und begannen dann unaufhaltsam die Sache selbst, vorwärts schreitend ohne umzusehen, ob einer mit dem Verständnis zurückbleibe oder nicht. Daher gab es unter vierzig Schülern vielleicht höchstens drei, welche von dem Gegenstande am Schlusse eine wirkliche Rechenschaft geben konnten, solche, deren Neigungen und Fähigkeiten er entsprach. Die übrigen schleppten sich entweder mit mühseliger Aufmerksamkeit und angstvollem Fleiße von Stunde zu Stunde, ohne je recht klar zu sein, oder sie ließen gleich im Anfange die Hoffnung sinken und sich regelmäßig bestrafen."
>
> nach Radbruch 1997, S. 125

Da viele Literaten offensichtlich ein gestörtes Verhältnis zur Mathematik hatten/ haben und sich mathematisch Begeisterte wohl eher nicht-literarischen Gebieten zuwenden, besteht ein gravierendes Übergewicht an Texten, die Mathematik und Mathematikunterricht negativ belegen. In *Der Schüler Gerber* von Friedrich Torberg wird die Mathematik (und ihre betonte Sinnlosikeit) bewusst eingesetzt, um das tragische Scheitern des Schülers Knut Gerber zu schildern. Die Mathematik erscheint bedrohend, beziehungslos und in Form eines selbstgefälligen, erbarmungslos autoritären Mathematikprofessors Kupfer. Die Mathematik selbst spielt für die Geschichte keine Rolle. Es sind eher die vielen mathematischen Schlagworte, die eben gerade *ohne* ein zugehöriges Verständnis die Geschichte dramatisch steigern (Beckmann 2003b).

> Auszüge: „… ja, dann können sie noch immer hingehen und aus einem kleinen schwarzen Gegenstand, der aussieht wie ein Trapez mit einer halben Ellipse daran, eine Patrone in ihre Schläfe schießen, oder sie können aus einem zylinderförmigen Gefäß irgendeine raschwirkende Flüssigkeit trinken, oder sie können sich einen Strick um den Hals knüpfen und das andere Ende an einem rechtwinkligen Fensterkreuz befestigen, oder sie können sich auf zwei vorbildlich parallele Eisenstränge werfen und etliche massive Räder mit dem Umfang $2r\pi$ über sich hinwegfahren lassen … Kein einziges Beispiel stammte aus einem jener Gebiete, in denen er halbwegs bewandert war."
>
> Torberg 1999, S. 89 f.

Eine Aufgabe des Mathematikunterrichts ist es, die Bedeutung der Mathematik und ein adäquates Bild von Mathematik zu vermitteln. Die Beachtung derartiger Stücke kann dazu beitragen, zum Beispiel indem der Missbrauch der Mathematik und ihre verzerrte Darstellung darin thematisiert wird. Durch die Besprechung der in *Der Schüler Gerber* angeschnittenen Mathematik und ihrer Einbettung zum Beispiel in einen anwendungsorientierten Rahmen kann gezeigt werden, dass die Themen einfach, interessant und durchaus beziehungsvoll sind.

Anmerkungen

1 Die Erprobung erfolgte im Rahmen einer wissenschaftlichen Hausarbeit (Annen 2006, Erstgutachterin: Beckmann, Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd).
2 Vgl. Artikel in diesem Heft MU 1/2 2007: Kolb, P.: Dialogisches Lernen mit dem Reisetagebuch – Spuren von Lernenden auf ihrer Reise durch Sprache und Mathematik.
3 Sriraman: Der mathematische Roman als literarisches Werk – eine Untersuchung im US-amerikanischen Mathematikunterricht, MU 1/2, 200.7
4 Nach Radbruch 1997, S. 125 ff.

Literatur

Abbott, E. (1984): Flatland (Reprint of the 1884 edition). Signet Classic Books.
Annen, M. (2006): Gedichte als Zugang zur Mathematik – Eine Kategorisierung und Untersuchung im fächerübergreifenden Mathematikunterricht der Realschule, wiss. Hausarbeit, Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd.
Beckmann, A. (1994): Der Schimmelreiter von Theodor Strom als Themenbeispiel für fächerübergreifenden Mathematikunterricht. In: Math. Schule 32/3, S. 145 – 156.
Beckmann, A. (1995): Der literarische Mathematikunterricht, Bad Salzdetfurth, Hildesheim (Franzbecker) 1995, 2. Auflage 2000.
Beckmann, A. (1999): Mit Theodor Storm durch Mathematisieren zur Exponentialfunktion, in: Math. Schule 37/1, S. 16 – 18.
Beckmann, A. (2003a): Fächerübergreifender Unterricht – Konzept und Begründung, Hildesheim, Berlin (Franzbecker).
Beckmann, A. (2003b): Fächerübergreifender Mathematikunterricht, Teil 3: Mathematikunterricht in Kooperation mit dem Fach Deutsch, Hildesheim, Berlin (Franzbecker).
Beckmann, A. (2003c): Die Computeranwendung MATEX – Mathematik in lierarischen Texten entdecken. In: PM 45/3, S. 128 – 132 (vgl. auch matex.net.tc).
Conrady, K. O. (1977). Das große deutsche Gedichtsbuch, Kronberg (Athenäum).
Davis, Ph. J, Hersh, R. (1994): Erfahrung Mathematik, Basel, Boston, Berlin (Birkhäuser).
Enzensberger, H. M. (1997. Der Zahlenteufel, Carl Hanser.
Fraser, D. (1993): Maths plus literature, Why link the two? Olwen Twelve Pockets Meets The Mathemagician, in: The New Zealand Mathematics Magazine 30/2, S. 8 – 12.
Fritzsche, J. (2000): Zur Didaktik und Methodik des Deutschunterrichts, Bd 3: Umgang mit Literatur, Stuttgart (Klett).
Gallin, P. & Ruf, U. (1995 – 1999): ich du wir 123 /456. Lehrmittelverlag des Kantons Zürich.
Guedj, D. (2000). The Parrot's Theorem, a Novel. London: Weidenfeld and Nicolson.
Hefendehl-Hebeker & Wille, F. (1987): Mathematische Erzählungen und mathematisches Theater. In: Kautschitsch, H., Metzler, W. (Hg.): Medien zur Veranschaulichung von Mathematik, Wien (Hölder-Pichler-Tempsky).
Jung, W. (1997): Neuere Hermeneutikkonzepte, Methodische Verfahren oder geniale Anschauung? In: Bogdal, K. H. (Hg.): Neue Literaturtheorien, Opladen (Westdeutscher Verlag GmbH), S. 159 – 180.
Kliman, M. (1993): Integrating mathematics and literature in the elementary classroom. In: arithmetic teacher, february, S. 318 – 321.
Kreft, J. (1977): Grundprobleme der Literaturdidaktik, Heidelberg (Quelle&Meyer).
Lehmann, J. (1993): Schriftsteller machen Mathematik, in: Prax. Math 35/2, S. 72 – 77.
Paefgen, E. K. (1999): Einführung in die Literaturdidaktik, Stuttgart, Weimar (Metzler).
Radbruch, K. (1997): Mathematische Spuren in der Literatur, Darmstadt (Wiss. Buchges.).
Sriraman, B. (2004): Mathematics and Literature (the sequel): Imagination as a pathway to advanced mathematical ideas and philosophy. *The Australian Mathematics Teacher*. Vol 60, No.1, pp. 17 – 23.
Stewart, I. (1995): Die Reise nach Pentagonien, Heidelberg, Berlin, Oxford (Spektr. Akad. Verlag) 1995.
Stewart, I. (1997): Die gekämmte Kugel, Heidelberg, Berlin, Oxford (Spektr. Akad. Verlag).
Stewart, I. (2001): Flatterland. Perseus Publishing.
Torberg, F. (1999). Der Schüler Gerber. Wien (Zsolnay).
Trojan, J. (1979): Das Quadrat. Beyer, K. (Hg.): Ode an den Sauerstoff und andere Scherzgedichte. Berlin (Stapp) 1979, S. 61.
Wagenschein, M. (1982): Verstehen lehren, Weinheim, Basel (Beltz).