

HW: 7.3 12, 14, 16

12. $x' = 4x - 3y$
 $y' = 5x - 4y$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 5 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+4)(\lambda-4) + 15$$

$$= \lambda^2 - 16 + 15 = \lambda^2 - 1$$

$\lambda = \pm 1$

So $x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^t$

$y(t) = \frac{1}{3}(x' - 4x)$

$= \frac{1}{3}(-c_1 e^{-t} + c_2 e^t - 4c_1 e^{-t} + 4c_2 e^t)$
 $= -\frac{5}{3}c_1 e^{-t} - c_2 e^{-t}$

So $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} + c_2 e^t \\ -\frac{5}{3}c_1 e^{-t} - c_2 e^t \end{pmatrix}$
 $= c_1 \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -\frac{5}{3}e^{-t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$

The two lin. ind. solutions are $\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -\frac{5}{3}e^{-t} \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix}$.

14. $x' = -x + y$
 $y' = -5x + 3y$

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda+1) + 5$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 3 + 5$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i$

$x(t) = c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t$

$y(t) = x' + x$

$= c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t + c_2 e^t \sin t + c_2 e^t \cos t$
 $= c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \sin t$

$= (2c_1 + c_2)e^t \cos t + (-c_1 + 2c_2)e^t \sin t$

So $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^t \cos t \\ 2e^t \cos t - e^t \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^t \sin t \\ e^t \cos t + 2e^t \sin t \end{pmatrix}$
two linearly independent solutions

16. $x' = -4x - y$ $\begin{vmatrix} -4-\lambda & -1 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$
 $y' = x - 2y$ $= \lambda^2 + 6\lambda + 8 + 1$
 $= (\lambda+3)^2$

$x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t}$

$y(t) = -x' - 4x$

$= -(-3c_1 e^{-3t} + c_2 e^{-3t} - 3c_2 t e^{-3t}) - 4(c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t})$
 $= (-c_1 + c_2)e^{-3t} - c_2 t e^{-3t}$

So $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} t e^{-3t} \\ e^{-3t} - t e^{-3t} \end{pmatrix}$

two linearly independent solutions.